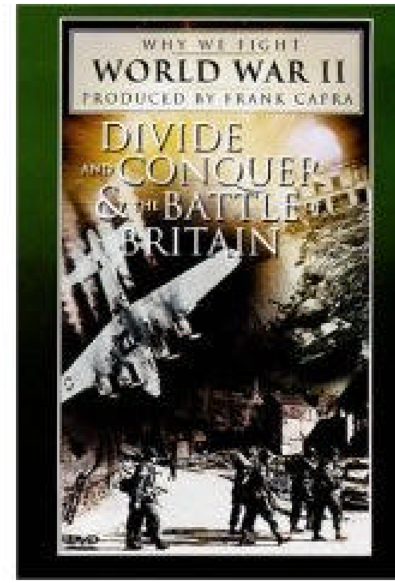
Algoritma *Divide and Conquer* (Bagian 1)

Bahan Kuliah

IF2251 Strategi Algoritmik

Oleh: Rinaldi Munir

- *Divide and Conquer* dulunya adalah strategi militer yang dikenal dengan nama *divide ut imperes*.



- Sekarang strategi tersebut menjadi strategi fundamental di dalam ilmu komputer dengan nama *Divide and Conquer.*

Definisi

- *Divide*: membagi masalah menjadi beberapa upa-masalah yang memiliki kemiripan dengan masalah semula namun berukuran lebih kecil (idealnya berukuran hampir sama),

- *Conquer*: memecahkan (menyelesaikan) masing-masing upa-masalah (secara rekursif), dan

- *Combine:* mengabungkan solusi masing-masing upa-masalah sehingga membentuk solusi masalah semula.

- Obyek permasalahan yang dibagi :

  masukan (*input*) atau *instances* yang berukuran *n* seperti:

  - tabel (larik),

  - matriks,

  - eksponen,

  - dll, bergantung pada masalahnya.

- Tiap-tiap upa-masalah mempunyai karakteristik yang sama (*the same type*) dengan karakteristik masalah asal, sehingga metode *Divide and Conquer* lebih natural diungkapkan dalam skema rekursif.

Skema Umum Algoritma *Divide and Conquer*

```
procedure DIVIDE_and_CONQUER(input n : integer)
{ Menyelesaikan masalah dengan algoritma D-and-C.
  Masukan: masukan yang berukuran n
  Keluaran: solusi dari masalah semula
}
Deklarasi
     r, k : integer
Algoritma
  if n ≤ n0 then  {ukuran masalah sudah cukup kecil }
     SOLVE upa-masalah yang berukuran n ini
  else
     Bagi menjadi r upa-masalah, masing-masing berukuran n/k
     for masing-masing dari r upa-masalah do
        DIVIDE_and_CONQUER(n/k)
     endfor
     COMBINE solusi dari r upa-masalah menjadi solusi masalah semula }
  endif
```

Jika pembagian selalu menghasilkan dua upa-masalah yang

```
procedure DIVIDE_and_CONQUER(input n : integer)
{ Menyelesaikan masalah dengan algoritma D-and-C.
  Masukan: masukan yang berukuran n
  Keluaran: solusi dari masalah semula
}
Deklarasi
     r, k : integer

Algoritma
  if n ≤ n0 then {ukuran masalah sudah cukup kecil }
     SOLVE upa-masalah yang berukuran n ini
  else
     Bagi menjadi 2 upa-masalah, masing-masing berukuran n/2
     DIVIDE_and_CONQUER(upa-masalah pertama yang berukuran n/2)
     DIVIDE_and_CONQUER(upa-masalah kedua yang berukuran n/2)
     COMBINE solusi dari 2 upa-masalah
  endif
```

$$T(n) = \begin{cases} g(n) & , n \le n_0 \\ 2T(n/2) + f(n) & , n > n_0 \end{cases}$$

Contoh-contoh masalah

1. **Mencari Nilai Minimum dan Maksimum (MinMaks)**

   Persoalan: Misalkan diberikan tabel *A* yang berukuran *n* elemen dan sudah berisi nilai *integer*.

   Carilah nilai minimum dan nilai maksimum sekaligus di dalam tabel tersebut.

Penyelesaian dengan *Algoritma Brute Force*

```
procedure MinMaks1(input A : TabelInt, n : integer,
                   output min, maks : integer)
{ Mencari nilai minimum dan maksimum di dalam tabel A yang berukuran n
elemen, secara brute force.
Masukan: tabel A yang sudah terdefinisi elemen-elemennya
Keluaran: nilai maksimum dan nilai minimum tabel
}
Deklarasi
    i : integer

Algoritma:
    min← A1 { inisialisasi nilai minimum}
    maks←A1 { inisialisasi nilai maksimum }
    for i←2 to n do

      if Ai < min then
        min←Ai
      endif

      if Ai > maks then
        maks←Ai
      endif

   endfor
```

$$T(n) = (n - 1) + (n - 1) = 2n - 2 = O(n)$$

Penyelesaian dengan *Divide and Conquer*

Contoh 4.1. Misalkan tabel *A* berisi elemen-elemen sebagai berikut:

4 12 23 9 21 1 35 2 24

Ide dasar algoritma secara *Divide and Conquer*:

4 12 23 9 21 1 35 2 24

DIVIDE

4 12 23 9   21 1 35 2 24

SOLVE: tentukan min & maks pada tiap bagian

4 12 23 9
min = 4
maks = 23

21 1 35 2 24
min = 1
maks = 35

COMBINE

4 12 23 9 21 1 35 2 24
min = 1
maks = 35

- Ukuran tabel hasil pembagian dapat dibuat cukup kecil sehingga mencari minimum dan maksimum dapat diselesaikan (SOLVE) secara lebih mudah.

- Dalam hal ini, ukuran kecil yang dipilih adalah 1 elemen atau 2 elemen.

MinMaks(A, n, min, maks)

Algoritma:

1. Untuk kasus n = 1 atau n = 2,
   SOLVE: Jika n = 1, maka $min = maks = A[n]$
   Jika n = 2, maka bandingkan kedua elemen untuk menentukan *min* dan *maks*.

2. Untuk kasus n > 2,
   (a) DIVIDE: Bagi dua tabel *A* menjadi dua bagian yang sama, A1 dan A2

   (b) CONQUER:
   MinMaks(A1, n/2, min1, maks1)
   MInMaks(A2, n/2, min2, maks2)

   (c) COMBINE:
   if min1 <min2 then min <- min1 else min <- min2
   if maks1 <maks2 then maks <- maks2 else maks <- maks1

Contoh 4.2. Tinjau kembali Contoh 4.1 di atas.

DIVIDE dan CONQUER:

4 12 23 9   21 1 35 2 24

4 12   23 9   21 1   35 2 24

4 12   23 9   21 1   35   2 24

SOLVE dan COMBINE:

4 12	23 9	21 1	35	2 24
min = 4	min = 9	min = 1	min = 35	min = 2
maks = 12	maks = 23	maks = 21	maks =35	maks = 24

4 12 23 9	21 1	35 2 24
min = 4	min = 1	min = 2
maks = 23	maks = 21	maks = 35

4 12 23 9	21 1 35 2 24
min = 4	min = 1
maks = 23	maks = 35

4 12 23 9 21 1 5 2 24

min = 1

maks = 35

```
procedure MinMaks2(input A : TabelInt, i, j : integer,
                   output min, maks : integer)
{ Mencari nilai maksimum dan minimum di dalam tabel A yang berukuran n
elemen secara Divide and Conquer.
Masukan: tabel A yang sudah terdefinisi elemen-elemennya
Keluaran: nilai maksimum dan nilai minimum tabel
}
Deklarasi
      min1, min2, maks1, maks2 : integer

Algoritma:
      if i=j then                         { 1 elemen  }
        min←Ai
        maks←Ai
      else
        if (i = j-1) then                 { 2 elemen  }
           if Ai < Aj then
               maks←Aj
            min←Ai
           else
             maks←Ai
             min←Aj
           endif
        else                              { lebih dari 2 elemen }
            k←(i+j) div 2                { bagidua tabel pada posisi k }
            MinMaks2(A, i, k, min1, maks1)
            MinMaks2(A, k+1, j, min2, maks2)
            if min1 < min2 then
               min←min1
            else
               min←min2
            endif

            if maks1<maks2 then
               maks←maks2
            else
               maks←maks2
          endif
```

Kompleksitas waktu asimptotik:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & , n = 1 \\ 1 & , n = 2 \\ 2T(n/2) + 2 & , n > 2 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Asumsi: $n = 2^k$, dengan k bilangan bulat positif, maka

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + 2 \\ &= 2(2T(n/4) + 2) + 2 = 4T(n/4) + 4 + 2 \\ &= 4T(2T(n/8) + 2) + 4 + 2 = 8T(n/8) + 8 + 4 + 2 \\ &= \ldots \\ &= 2^{k-1}\, T(2) + \sum_{i=1}^{k-1} 2^i \\ \\ &= 2^{k-1} \cdot 1 + 2^k - 2 \\ &= n/2 + n - 2 \\ &= 3n/2 - 2 \\ &= O(n) \end{aligned}$$

- MinMaks1 secara *brute force* :

$$T(n) = 2n - 2$$

- MinMaks2 secara *divide and conquer*:

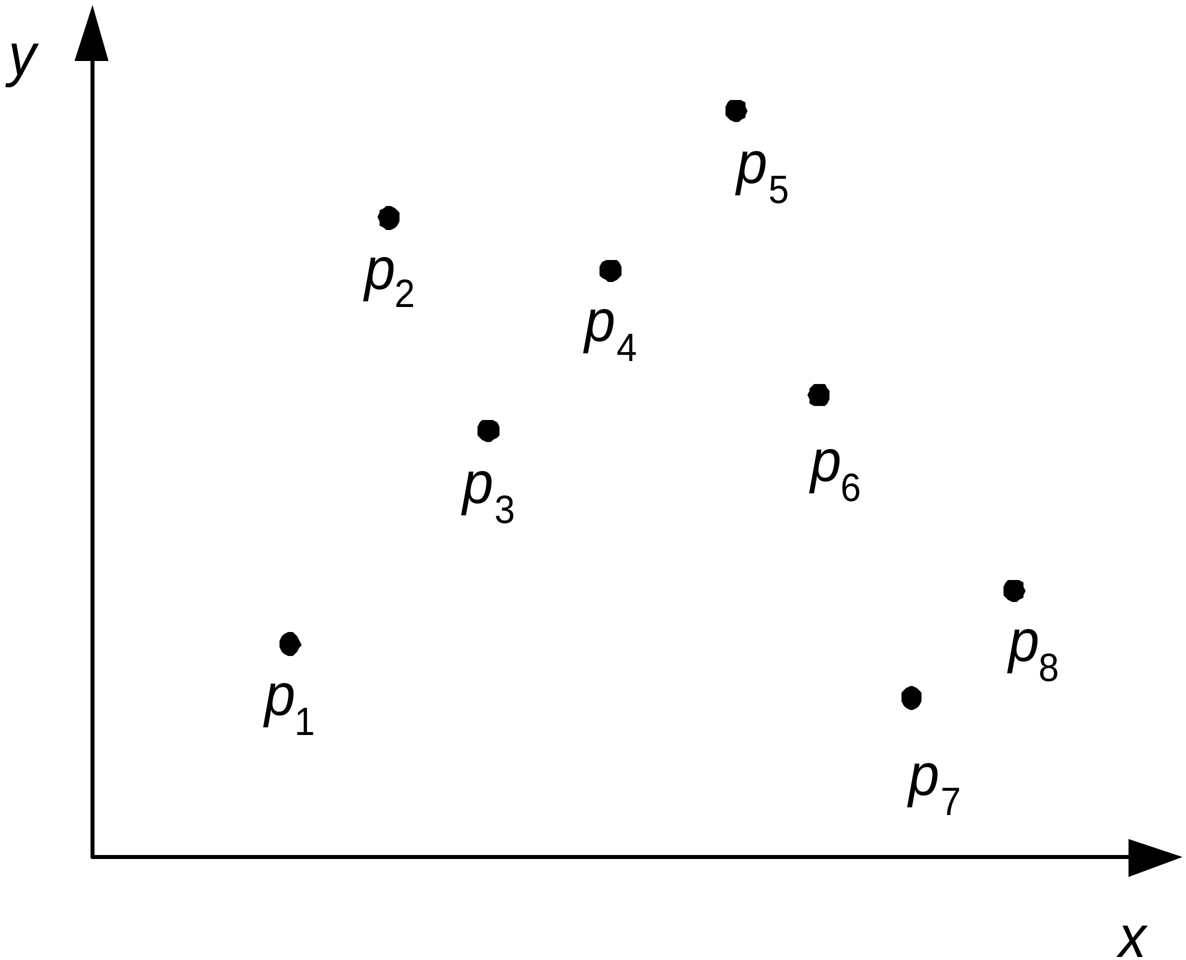
$$T(n) = 3n/2 - 2$$

- Perhatikan: $3n/2 - 2 < 2n - 2 \;, n \geq 2$.

- <u>Kesimpulan</u>: algoritma MinMaks lebih mangkus dengan metdoe *Divide and Conquer*.

2. Mencari Pasangan Titik yang Jaraknya Terdekat (*Closest Pair*)

Persoalan: Diberikan himpunan titik, P, yang terdiri dari n buah titik, (x_i, y_i), pada bidang 2-D. Tentukan jarak terdekat antara dua buah titik di dalam himpunan P.



Jarak dua buah titik $p_1 = (x_1, y_1)$ dan $p_2 = (x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Penyelesaian dengan Algoritma Brute Force

- Hitung jarak setiap pasang titik. Ada sebanyak

  $C(n, 2) = n(n – 1)/2$ pasangan titik

- Pilih pasangan titik yang mempunyai jarak terkecil.

- Kompleksitas algoritma adalah $O(n^2)$.

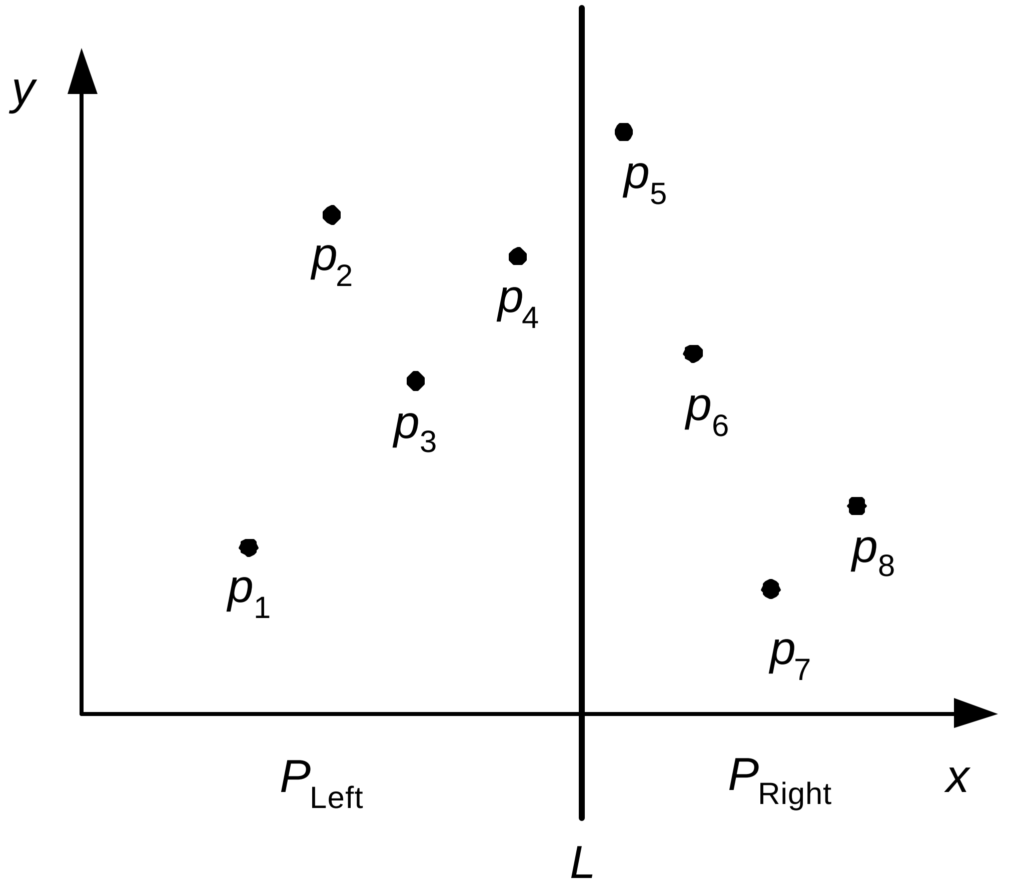
Penyelesaian dengan Divide and Conquer

- Asumsi: $n = 2^k$ dan titik-titik diurut berdasarkan absis (x).

- Algoritma *Closest Pair*:

  1. SOLVE: jika $n = 2$, maka jarak kedua titik dihitung langsung dengan rumus Euclidean.

2. DIVIDE: Bagi himpunan titik ke dalam dua bagian, P_{left} dan P_{right}, setiap bagian mempunyai jumlah titik yang sama.



3. CONQUER: Secara rekursif, terapkan algoritma *D-and-C* pada masing-masing bagian.

4. Pasangan titik yang jaraknya terdekat ada tiga kemungkinan letaknya:

(a) Pasangan titik terdekat terdapat di bagian P_{Left}.

(b) Pasangan titik terdekat terdapat di bagian P_{Right}.

(c) Pasangan titik terdekat dipisahkan oleh garis batas L, yaitu satu titik di P_{Left} dan satu titik di P_{Right}.

Jika kasusnya adalah (c), maka lakukan tahap COMBINE untuk mendapatkan jarak dua titik terdekat sebagai solusi persoalan semula.

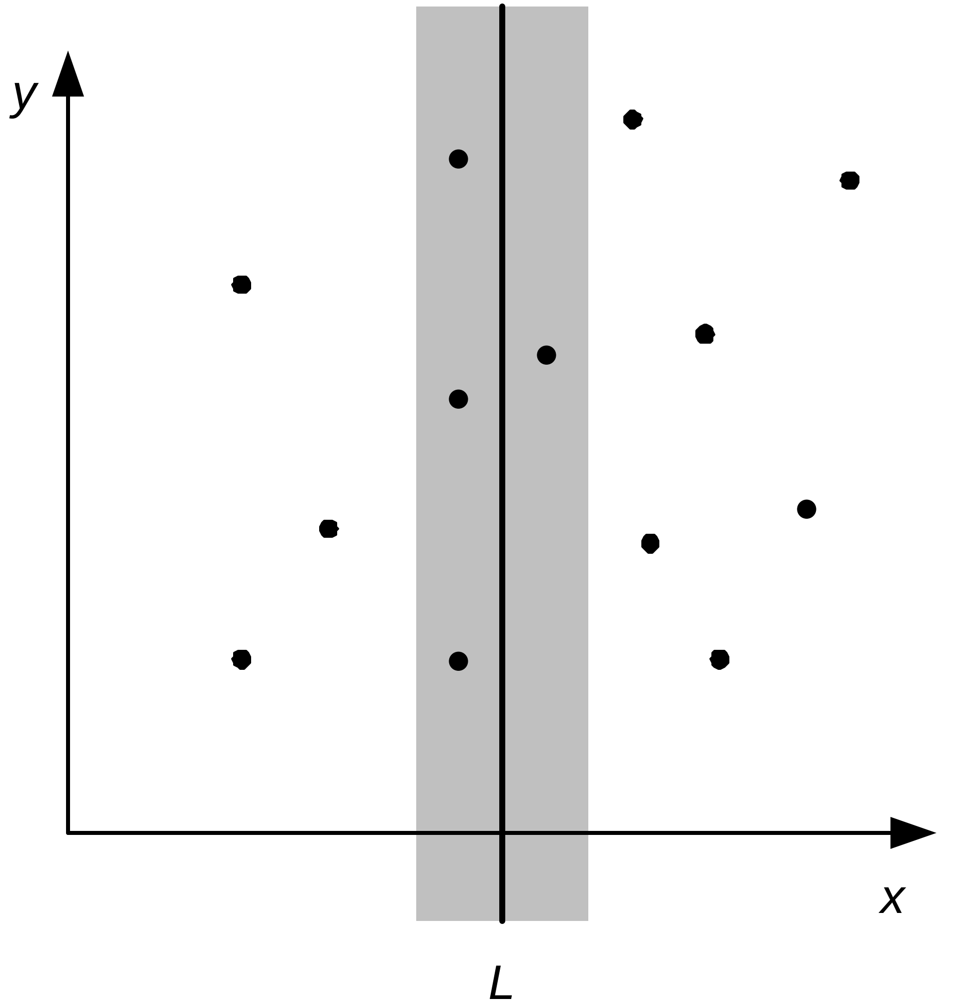
```
procedure FindClosestPair2(input P: SetOfPoint, n : integer,
                           output delta : real)

{ Mencari jarak terdekat sepasang titik di dalam himpunan P. }

Deklarasi:
   DeltaLeft, DeltaRight : real

Algoritma:
   if n = 2 then
      delta ← jarak kedua titik dengan rumus Euclidean
   else
      P-Left← {p1, p2 ,..., pn/2 }
      P-Right ← {pn/2+1, pn/2+2 ,..., pn }
      FindClosestPair2(P-Left, n/2, DeltaLeft)
      FindClosestPair2(P-Right, n/2, DeltaRight)
      delta ← minimum(DeltaLeft, DeltaRight)
      {--***********************************************************--}
      Tentukan apakah terdapat titik pl di P-Left dan pr di P-Right
      Dengan jarak(pl, pr) < delta. Jika ada, set delta dengan jarak
      terkecil tersebut.
      {--***********************************************************--}
   endif
```

- Jika terdapat pasangan titik p_l and p_r yang jaraknya lebih kecil dari *delta*, maka kasusnya adalah:

(i) Absis x dari p_l dan p_r berbeda paling banyak sebesar *delta*.

(ii) Ordinat y dari p_l dan p_r berbeda paling banyak sebesar *delta*.

- Ini berarti p_l and p_r adalah sepasang titik yang berada di daerah sekitar garis vertikal L:



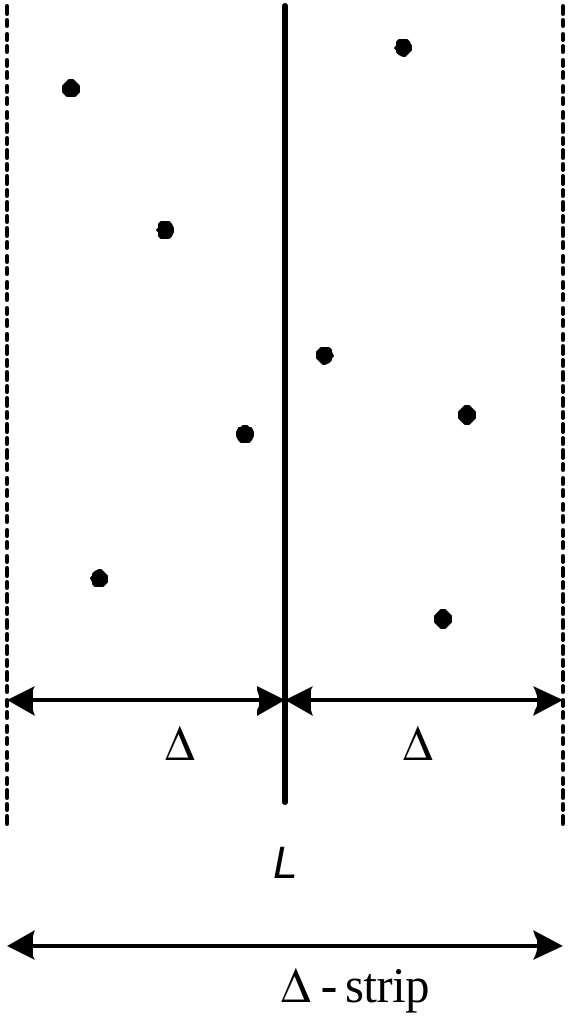
Oleh karena itu, implementasi tahap COMBINE sbb:

(i) Temukan semua titik di P_{Left} yang memiliki absis x minimal $x_{n/2\ -\ delta}$.

(ii) Temukan semua titik di P_{Right} yang memiliki absis x maksimal $x_{n/2+\ delta}$.

Sebut semua titik-titik yang ditemukan pada langkah (i) dan (ii) tersebut sebagai himpunanP_{strip} yang berisi s buah titik.

Urut titik-titik tersebut dalam urutan absis y yang menaik. Misalkan $q1$, $q2$, ..., qs menyatakan hasil pengurutan.



Langkah COMBINE:

```
for i←1 to s do
   for j←i+1 to s do
      exit when (|qi.x – qj.x | > Delta or  |qi.y – qj.y | > Delta
      if jarak (qi, qj) < Delta then
         Delta ← jarak(qi, qj) { dihitung dengan rumus Euclidean }
      endif
   endfor
endfor
```

Kompleksitas algoritma:

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + cn & , n > 2 \\ a & , n = 2 \end{cases}$$

Solusi dari persamaan di atas adalah $T(n) = O(n \log n)$.

3. Algoritma Pengurutan dengan Metode *Divide and Conquer*

```
procedure Sort(input/output A : TabelInt, input n : integer)

{ Mengurutkan tabel A dengan metode Divide and Conquer
  Masukan: Tabel A dengan n elemen
  Keluaran: Tabel A yang terurut
}
Algoritma:
   if Ukuran(A) > 1 then
      Bagi A menjadi dua bagian, A1 dan A2, masing-masing berukuran n1
      dan n2 (n = n1 + n2)

      Sort(A1, n1)   { urut bagian kiri yang berukuran n1 elemen }
      Sort(A2, n2)   { urut bagian kanan yang berukuran n2 elemen }

      Combine(A1, A2, A)  { gabung hasil pengurutan bagian kiri dan
                            bagian kanan }
   end
```

Contoh:

A

4	12	3	9	1	21	5	2

Dua pendekatan (*approach*) pengurutan:

1. Mudah membagi, sulit menggabung (*easy split/hard join*)
   Tabel *A* dibagidua berdasarkan posisi elemen:

Divide: *A*1

4	12	3	9

*A*2

1	21	5	2

Sort: *A*1

3	4	9	12

*A*2

1	2	5	21

Combine: *A*1

1	2	3	4	5	9	12	21

Algoritma pengurutan yang termasuk jenis ini:

a. urut-gabung (*Merge Sort*)
b. urut-sisip (*Insertion Sort*)

2. Sulit membagi, mudah menggabung *(hard split/easy join)*

Tabel *A* dibagidua berdasarkan nilai elemennya. Misalkan elemen-elemen *A*1 ≤ elemen-elemen *A*2.

Divide: *A*1

4	2	3	1

*A*2

9	21	5	12

Sort: *A*1

1	2	3	4

*A*2

5	9	12	21

Combine: *A*

1	2	3	4	5	9	12	21

Algoritma pengurutan yang termasuk jenis ini:

a. urut-cepat *(Quick Sort)*

b. urut-seleksi *(Selection Sort)*

(a) Merge Sort

Algoritma:

1. Untuk kasus n = 1, maka tabel *A* sudah terurut dengan sendirinya (langkah SOLVE).

2. Untuk kasus n > 1, maka
   (a) DIVIDE: bagi tabel *A* menjadi dua bagian, bagian kiri dan bagian kanan, masing-masing bagian berukuran n/2 elemen.
   (b) CONQUER: Secara rekursif, terapkan algoritma *D-and-C* pada masing-masing bagian.
   (c) MERGE: gabung hasil pengurutan kedua bagian sehingga diperoleh tabel *A* yang terurut.

Contoh *Merge*:

*A*1			*A*2				*B*					
1	13	24	2	15	27	$1 < 2 \rightarrow 1$	1					
1	13	24	2	15	27	$2 < 13 \rightarrow 2$	1	2				
1	13	24	2	15	27	$13 < 15 \rightarrow 13$	1	2	13			
1	13	24	2	15	27	$15 < 24 \rightarrow 15$	1	2	13	15		
1	13	24	2	15	27	$24 < 27 \rightarrow 24$	1	2	13	15	24	
1	13	24	2	15	27	$27 \rightarrow$	1	2	13	15	24	27

Contoh 4.3. Misalkan tabel *A* berisi elemen-elemen berikut:

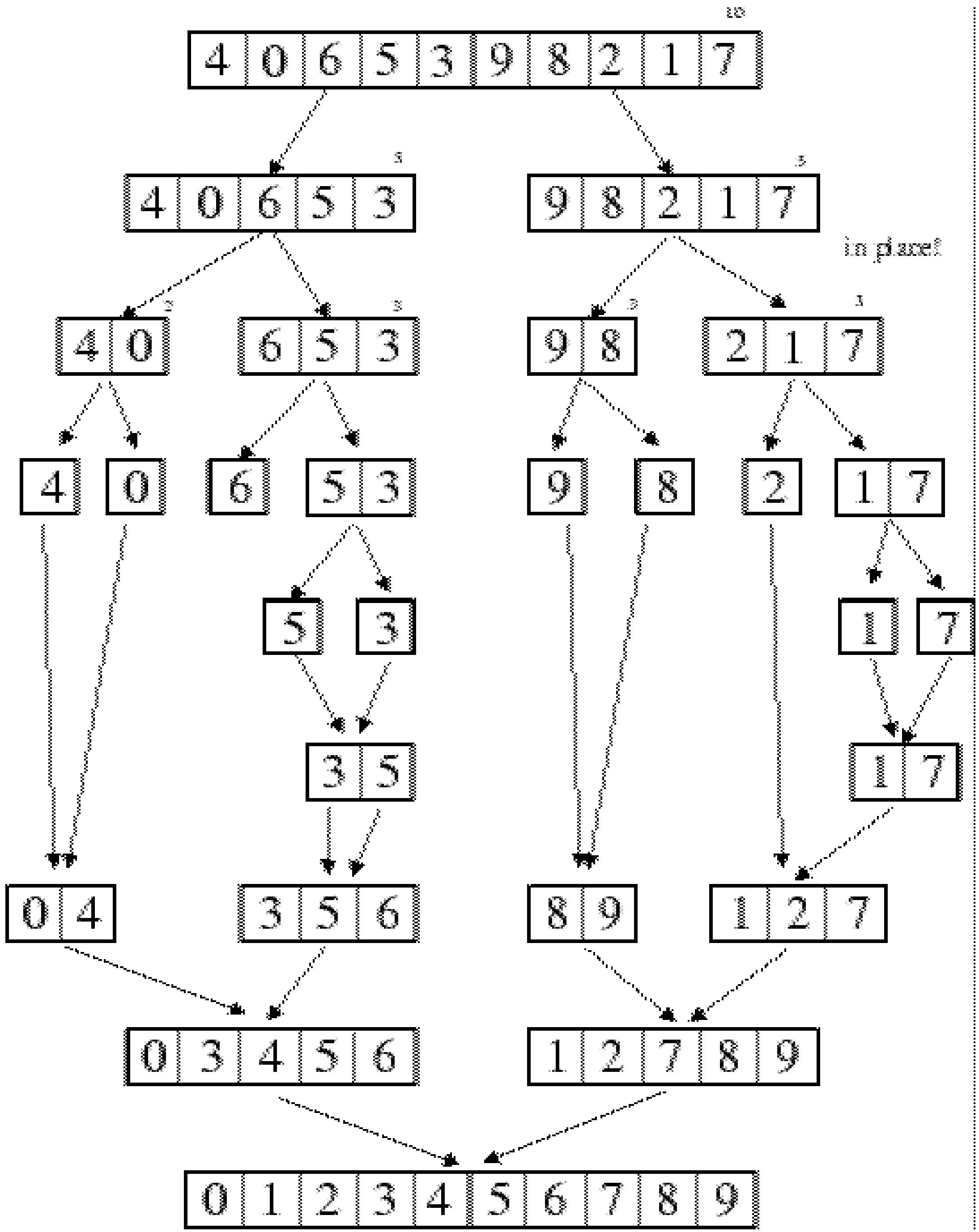
4	12	23	9	21	1	5	2

DIVIDE, CONQUER, dan SOLVE:

4	12	23	9	21	1	5	2
4	12	23	9	21	1	5	2
4	12	23	9	21	1	5	2
4	12	23	9	21	1	5	2

MERGE:

4	12	9	23	1	21	2	5
4	9	12	23	1	2	5	21
1	2	4	5	9	12	21	23


10
4 0 6 5 3 9 8 2 1 7
5
4 0 6 5 3
5
9 8 2 1 7
in place?
2
4 0
3
6 5 3
2
9 8
3
2 1 7
4
0
6
5 3
9
8
2
1 7
5
3
1
7
3 5
1 7
0 4
3 5 6
8 9
1 2 7
0 3 4 5 6
1 2 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

```
procedure MergeSort(input/output A : TabelInt, input i, j : integer)

{ Mengurutkan tabel A[i..j] dengan algoritma Merge Sort
  Masukan: Tabel A dengan n elemen
  Keluaran: Tabel A yang terurut
}
Deklarasi:
   k : integer

Algoritma:
   if i < j then        { Ukuran(A)> 1}
     k←(i+j) div 2
     MergeSort(A, i, k)
     MergeSort(A, k+1, j)
     Merge(A, i, k, j)
   endif
```

Prosedur *Merge*:

```
procedure Merge(input/output A : TabelInt, input kiri,tengah,kanan :
   integer)
{ Menggabung tabel A[kiri..tengah] dan tabel A[tengah+1..kanan]
  menjadi tabel A[kiri..kanan] yang terurut menaik.
  Masukan: A[kiri..tengah] dan tabel A[tengah+1..kanan] yang sudah
   terurut menaik.
  Keluaran: A[kiri..kanan] yang terurut menaik.
}
Deklarasi
   B : TabelInt
   i, kidal1, kidal2 : integer

Algoritma:
   kidal1←kiri            { A[kiri .. tengah] }
   kidal2←tengah + 1      { A[tengah+1 .. kanan] }
   i←kiri
   while (kidal1 ≤ tengah) and (kidal2 ≤ kanan) do
       if A[kidal1] ≤ A[kidal2] then
          B[i]←A[kidal1]
          kidal1←kidal1 + 1
      else
          B[i]←A[kidal2]
          kidal2←kidal2 + 1
      endif
      i←i + 1
    endwhile
   { kidal1 > tengah or kidal2 > kanan }

   { salin sisa A bagian kiri ke B, jika ada }
   while (kidal1 ≤ tengah) do
       B[i]←A[kidal1]
      kidal1←kidal1 + 1
      i←i + 1
    endwhile
   { kidal1 > tengah }

   { salin sisa A bagian kanan ke B, jika ada }
   while (kidal2 ≤ kanan) do
      B[i]←A[kidal2]
      kidal2←kidal2 + 1
      i←i + 1
   endwhile
   { kidal2 > kanan }

   { salin kembali elemen-elemen tabel B ke A }
   for i←kiri to kanan do
      A[i]←B[i]
    endfor
   { diperoleh tabel A yang terurut membesar }
```

- Kompleksitas waktu:

Asumsi: $n = 2^k$

$T(n)$ = jumlah perbandingan pada pengurutan dua buah upatabel + jumlah perbandingan pada prosedur *Merge*

$$T(n) = \begin{cases} a & , n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & , n > 1 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + cn \\
&= 2(2T(n/4) + cn/2) + cn = 4T(n/4) + 2cn \\
&= 4(2T(n/8) + cn/4) + 2cn = 8T(n/8) + 3cn \\
&= \ \ldots \\
&= 2^k\, \mathrm{T}(n/2^k) + kcn
\end{aligned}
$$

Berhenti jika ukuran tabel terkecil, $n = 1$:

$$n/2^k = 1 \rightarrow \mathrm{k} = {}^2\log n$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
T(n) &= nT(1) + cn\ {}^2\log n \\
&= na + cn\ {}^2\log n \\
&= O(n\ {}^2\log n)
\end{aligned}
$$

(b) *Insertion Sort*

```
procedure InsertionSort(input/output A : TabelInt,
                        input i, j : integer)
{ Mengurutkan tabel A[i..j] dengan algoritma Insertion Sort.
  Masukan: Tabel A dengan n elemen
  Keluaran: Tabel A yang terurut
}
Deklarasi:
   k : integer

Algoritma:
   if i < j then        { Ukuran(A)> 1}
     k←i
     InsertionSort(A, i, k)
     InsertionSort(A, k+1, j)
     Merge(A, i, k, j)
   endif
```

Perbaikan:

```
procedure InsertionSort(input/output A : TabelInt,
                        input i, j : integer)
{ Mengurutkan tabel A[i..j] dengan algoritma Insertion Sort.
  Masukan: Tabel A dengan n elemen
  Keluaran: Tabel A yang terurut
}
Deklarasi:
   k : integer

Algoritma:
   if i < j then        { Ukuran(A)> 1}
     k←i
     Insertion(A, k+1, j)
     Merge(A, i, k, j)
   endif
```

Prosedur *Merge* dapat diganti dengan prosedur penyisipan sebuah elemen pada tabel yang sudah terurut (lihat algoritma *Insertion Sort* versi iteratif).

Contoh 4.4. Misalkan tabel *A* berisi elemen-elemen berikut:

4	12	23	9	21	1	5	2

DIVIDE, CONQUER, dan SOLVE::

4	12	3	9	1	21	5	2
4	12	3	9	1	21	5	2
4	12	3	9	1	21	5	2
4	12	3	9	1	21	5	2
4	12	3	9	1	21	5	2
4	12	3	9	1	21	5	2
4	12	3	9	1	21	5	2
4	12	3	9	1	21	5	2
4	12	3	9	1	21	5	2

MERGE:								
	4	12	3	9	1	21	5	2
	3	4	12	9	1	21	5	2
	3	4	9	12	1	21	5	2
	1	3	4	9	12	21	5	2
	1	3	4	9	12	21	5	2
	1	3	4	5	9	12	21	2
	1	2	3	4	5	9	12	21

Kompleksitas waktu algoritma *Insertion Sort*:

$$T(n) = \begin{cases} a & ,n = 1 \\ T(n-1) + cn & ,n > 1 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
T(n) &= cn + T(n-1) \\
&= cn + \{ c \cdot (n-1) + T(n-2) \} \\
&= cn + c(n-1) + \{ c \cdot (n-2) + T(n-3) \} \\
&= cn + \mathrm{c} \cdot (n-1) + c \cdot (n-2) + \{c(n-3) + T(n-4) \} \\
&= \ldots \\
&= cn + c \cdot (n-1) + c(n-2) + c(n-3) + \ldots + c2 + T(1) \\
&= c\{ n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 2 \} + a \\
&= \mathrm{c}\{ (n-1)(n+2)/2 \} + a \\
&= cn^2/2 + cn/2 + (a - c) \\
&= O(n^2)
\end{aligned}$$